



平成 21 年度後期 期末試験 試験問題

試験科目： 材料力学Ⅱ

配 当： 材料系（マテリアル生産科学）
2 年 1 組

担当教員： 宇都宮 裕（マテリアル科学コース）

試験時間： 平成 22 年 2 月 3 日
13 : 00 - 14 : 30

試験室： R1-311

注意事項

- ・ 試験開始の合図があるまで、本紙を開けてはいけません。
- ・ 電卓、関数電卓、ポケットコンピュータを使用しても構いません。
- ・ 教科書、参考書、ノート類を参照してはいけません。**持ち込みは禁止**です。
- ・ 末尾に**公式集**があります。必要があれば、これらの公式を用いてもよい。
- ・ 試験開始後 30 分間および試験終了直前 10 分間は退出できません。
- ・ 試験中の不正行為は厳重に取り締まり、発見した場合は正規の手続きを行います。
- ・ 本紙（問題）は、持ち帰って構いません。ただし、**著作権は出題者が保持**します。インターネット上や書籍で公開される場合には、許可をとってください。

問1 次の文章は平面応力状態 ($\sigma_z = 0$) で外圧 p_o を受ける内半径 r_i 、外半径 r_o の厚肉円筒 (図 a) に作用する応力に関するものである。ただし、本問では図中に記載の内圧は無視する ($p_i = 0$)。文章をよく読んで、下の問いに答えなさい。

この円筒中に半径 r と $(r + dr)$ の二つの同心円と中心角 $d\theta$ で囲まれた微小要素を考える (図(b))。この要素の半径方向の釣り合いは、次式で表される。

【 a 】 (1)

ところで、中心からの距離が r の位置での半径方向変位を u とすると、半径方向ひずみ成分と円周方向ひずみ成分は、次のように表すことができる。

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \text{【 b 】} \quad (2)$$

円筒座標系における平面応力のフックの法則が次式で表されたとすると

$$\sigma_r = E'(\varepsilon_r + \nu' \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = E'(\varepsilon_\theta + \nu' \varepsilon_r) \quad (3)$$

式(2),(3)を式(1)に代入すると、釣り合い式は u と r のみで次のように表される。

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (4)$$

この微分方程式の一般解は、次のように表すことができる。

$$u = \text{【 c 】} \quad (5)$$

ここで、 C_1, C_2 は積分定数である。

境界条件として、管の内面 ($r = r_i$) で $\sigma_r = 0$ 、外面 ($r = r_o$) で 【 d 】 であることを考慮すると、積分定数 C_1, C_2 が決定でき、

$$\sigma_r = \frac{r_o^2 p_o}{r_i^2 - r_o^2} - \frac{r_i^2 r_o^2 p_o}{r^2 (r_i^2 - r_o^2)}, \quad \sigma_\theta = \text{【 e 】} \quad (7)$$

(1) 上記の空欄 【 a 】 ～ 【 e 】 に入る適切な数式をそれぞれ答えよ。

(2) この円管の材料のヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。このとき式(3)中の E' と ν' をそれぞれ、 E と ν を用いて表しなさい。

問2 図のように、水平面内で L 形に曲げられたはりの自由端に鉛直荷重 P が働くとき、その自由端の鉛直変位を求めなさい。

ただし、このはりの縦弾性係数は E 、横弾性係数は G 、断面二次モーメントは I 、断面二次極モーメントは I_p とする。

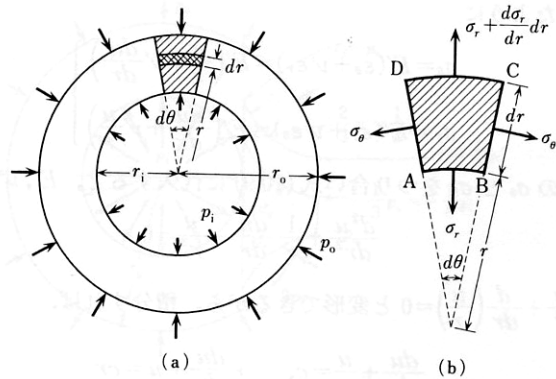
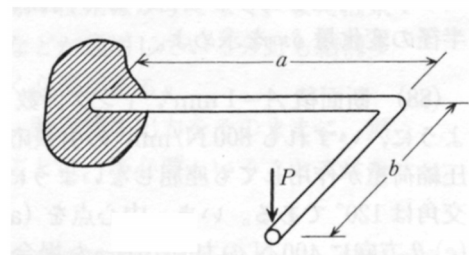


図 厚肉円筒に作用する応力

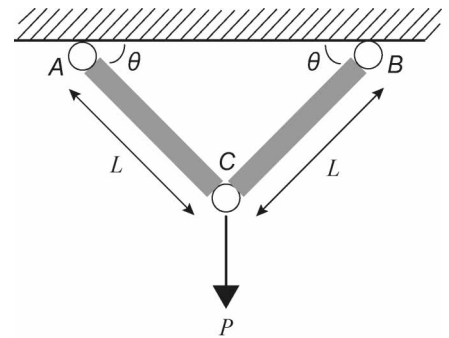


問3 Hooke の法則に従う弾性体（縦弾性係数 E 、横弾性係数 G ）のひずみエネルギー密度 U_0 は、総和規約を用いると次式で表される。

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

- (1) U_0 を応力成分 (σ_x, τ_{xy} など) とひずみ成分 ($\varepsilon_x, \gamma_{xy}$ など) を用いて書き下せ。
- (2) U_0 をひずみ成分 ($\varepsilon_x, \gamma_{xy}$ など) のみを用いて書き下せ。
- (3) U_0 と対応する コンプリメンタリーエネルギー密度 を U_0^c とすると、 $\partial U_0^c / \partial \sigma_y = \varepsilon_y$ が成立することを示せ。

問4 長さ L 、直径 d 、ヤング率 E の2本の丸棒が、図のようにヒンジ（滑節）によって連結されトラスが構成されている。このトラスのヒンジ C に、鉛直下向きの力 P を作用させる。このとき、2本の棒の他端はそれぞれヒンジを介して天井に角度 θ で固定されている。以下の問いに答えよ。



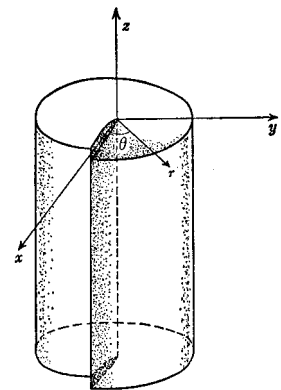
- (1) 各棒の軸方向に作用する引張応力はいくらか。
 - (2) 力 P を負荷したことで生じる各棒の伸びを求めよ。
 - (3) 点 C の鉛直方向下向きの変位 v を求めよ。
- 次に、仮想仕事の原理を用いた別法で変位 v を求める。
- (4) P が作用してつり合っている状態から、点 C に鉛直方向下向きに微小な仮想変位 $\delta \bar{v}$ が生じたと仮定する。このとき、各棒に生じる仮想ひずみの増分 $\delta \bar{\varepsilon}$ と、トラス全体の内力による仮想仕事の増分 $\delta \bar{U}$ を求めよ。
 - (5) (4)の結果と、仮想仕事の原理を用いて変位 v を求めよ。

問5 ラせん転位のまわりのひずみと応力を考える。図のように z 軸が転位線方向になるように座標軸をとるとき、基準状態（転位がない状態）からの各点の変位 $u(u, v, w)$ は次の様に表すことができる。

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \frac{b\theta}{2\pi} = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ただし、 b はバーガースベクトルの大きさである。

- (1) 上記の変位から、この転位のまわりの各ひずみ成分を求めなさい。ただし、零となる成分についても明示すること。このとき、付録の微分公式を用いてもよい。
- (2) Hooke の法則を用いて、この転位のまわりの各応力成分を求めなさい。
- (3) ひずみエネルギー密度の分布を求めなさい。



公式集

- ・ Hooke の法則 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} \quad , & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \} \quad , & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \quad , & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}\end{aligned}$$

- ・ 弾性定数間の関係 : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- ・ 断面モーメント:

厚さ h 、幅 b の長方形断面のはりの断面二次モーメント : $I = bh^3/12$

直径 d の円形断面のはりの断面二次モーメント : $I = \pi d^4/64$

直径 d の円形断面のはりの断面二次極モーメント : $I_p = \pi d^4/32$

- ・ 曲げモーメント M を受けるはりのたわみ y : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$

- ・ ひずみエネルギー (単純な負荷様式の場合) :

軸力 P の作用する棒 : $U = \frac{P^2 l}{2EA}$

曲げモーメント M が作用するはり : $U = \frac{M^2 l}{2EI}$

ねじりモーメント M_T が作用する棒 : $U = \frac{M_T^2 l}{2GI_p}$

- ・ カスチリアーノの第 1 定理 : $\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$

- ・ カスチリアーノの第 2 定理 : $\frac{\partial U^c}{\partial Q_i} = q_i$

- ・ 逆正接関数の微分 :

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$